Ez nagyon jól összecseng a „gyűrűk funkcionális fölfogásával”, melyről a 4. fejezetben beszéltünk: eszerint $\mathbb{Z}$-re úgy kellene tekintenünk, mint olyan függvények gyűrűjére, amely a p prímszámok halmazán van értelmezve, és értékeit $\mathbb{F}_p$-ből veszi föl. Ez a fölfogás lehetővé teszi, hogy a ζ-függvényt a gyűrűk igen széles osztályára értelmezzük a (12)-es képlettel analóg módon.

Most visszatérünk a K-elmélethez. Az $\mathbb{F}_q$ véges testek esetén meg lehet mutatni, hogy a $K_n(\mathbb{F}_q)$ csoportok végesek minden $n \geqslant 1$-re. A rendjükre vonatkozó információt az alábbi gyönyörű összefüggés írja le:

$$\frac{|K_{2m}(\mathbb{F}_q)|}{|K_{2m+1}(\mathbb{F}_q)|} = \left|\zeta_{\mathbb{F}_q}(-m)\right| , \quad \text{ha} \;\; m \geqslant 1.$$

Ami a $\mathbb{Z}$ gyűrű esetét illeti, a jelenlegi tudásunk alapján föltételezhetjük, hogy van valamilyen kapcsolat a Riemann-féle ζ-fügvény $m > 0$ esetén fölvett $\zeta(-m)$ értékei és az $\dfrac{|K_{2m}(\mathbb{Z})|}{|K_{2m+1}(\mathbb{Z})|}$ hányadosok között. Ismeretes, hogy páratlan $m > 0$ számokra $\zeta(m)$ racionális szám, és 0, ha $m > 0$, és páros; azt is tudjuk, hogy a $K_{2m}(\mathbb{Z})$ és $K_{2m+1}(\mathbb{Z})$ csoportok végesek. Az

$$\frac{|K_{2m}(\mathbb{Z})|}{|K_{2m+1}(\mathbb{Z})|} = |\zeta(-m)| , \quad \text{ha} \;\; m > 0, \;\text{és páratlan}$$

összefüggés már a legegyszerűbb $m = 1$ esetben is hamis, hiszen $|K_2(\mathbb{Z})| = 2$, és $|K_3(\mathbb{Z})| = 48$, viszont $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. Nincs azonban kizárva, hogy az összefüggés 2-hatvány szorzóktól eltekintve mégis teljesül. Azt mindenesetre már igazolták, hogy $\zeta(-m)$ nevezője osztja $|K_{2m+1}(\mathbb{Z})|$-t. Másrészt pedig, ha $p > m$ prímszám, akkor p-nek nem kisebb hatványa osztja $|K_{2m}(\mathbb{Z})|$-t, mint $\zeta(-m)$ számlálóját (föltéve még egy plusz feltétel teljesülését p-re, amelyről azonban azt sejtik, hogy mindig igaz, és $p < 125\,000$-re már ellenőrizték is). Emlékeztetnénk rá, hogy már találkoztunk a ζ-függvény negatív egészeken fölvett értékeivel, amikor a 21. fejezet 5. példájában az aritmetikai csoportok kohomológiájával foglalkoztunk. Ez nem véletlen: valóban létezik ennek kapcsolata a $K_n(\mathbb{Z})$ csoportokkal.

A számelmélet és a K-elmélet között számos és sokféle kapcsolat létezik, de ezeket nem tárgyalhatjuk most részletesebben, mert ehhez bonyolult technikai eszközök bevezetésére lenne szükségünk.

Megjegyzések az irodalomhoz

Az egész könyv két téma szövevényes összekapcsolódására épül: az egyik az algebrai fogalmak és elméletek rendszerezett tárgyalása, a másik pedig a kulcsfontosságú példák bemutatása. Az ezekre a témákra való irodalmi utalásokkal külön foglalkozunk. Az a benyomásom, hogy a könyvek első kiadásai rendszerint frissebbek és érdekesebbek, mint a későbbiek, még ha az utóbbiak technikailag alaposabbak is. Ezért az egyes művek általam ismert első kiadására hivatkozom.

Az algebra olyan alapfogalmai, mint a csoportok, a gyűrűk, a modulusok vagy a testek, valamint az ezekkel foglalkozó legfőbb elméletek, ideértve a féligegyszerű modulusok és gyűrűk elméletét és a Galois-elméletet, mind megtalálhatók van der Waerden klasszikus kétkötetes monográfiájában [104 (1930, 1931)]. Noha több mint fél évszázad telt el a megjelenése óta, ez a csodálatos könyv korántsem tekinthető elavultnak, s azokhoz a kérdésekhez, melyeket a könyv is tárgyal, mind a mai napig nemigen lehet jobb forrást találni.

Majd egy évszázad kellett a legfontosabb algebrai fogalmak kiválasztásához, valamint az elmélet axiomatikus szellemben való újratárgyalásához; ebben a munkában többek között Gauß, Galois, Jordan, Klein, Kronecker, Dedekind és Hilbert vettek részt. Ennek az évszázados folyamatnak az eredményeit azonban már alig egy évtized alatt, 1920 és 1930 között sikerült az algebra standard nyelvén formába önteni; ebben kiemelkedő szerepe volt E. Noethernek. Ebben az időszakban jelent meg van der Waerden könyve. Hogy valamennyire érzékelhessük az algebra szellemében és tárgyalásmódjában végbement változást, érdemes összehasonlítanunk van der Waerden könyvét Weber munkájával [105 (1898, 1899)], amelyből az előző generációk tanulták az alegbrát.

Az újabb munkák közül meg kell említenünk a Bourbaki-sorozat (Éléments de mathématiques) algebrának szentelt részeit [16 (1942–1948)], [17 (1959)]. Ezek a könyvek első látásra azt a benyomást kelthetik, hogy kezdők számára is jó tankönyvként szolgálhatnak, mivel a tárgyalásmódjuk minden részletre kiterjed, és a legegyszerűbb definíciókat is tartalmazzák. Ez a benyomásunk azonban teljesen téves: egyrészt ugyanis ezeknek a könyveknek egyik alapelvük, hogy minden kérdést a maximális általánosságban tárgyaljanak, másrészt hiányoznak belőlük az olyan részek, melyek az új fogalmak bevezetését vagy az elmélet fejlődési irányait motiválnák. A szakértő olvasó számára azonban értékes részletek gazdag lelőhelyét kínálják ezek a kötetek.

A szakosodottabb könyvek közül megemlítjük Atiyah és Macdonald kommutatív algebráról szóló munkáját [5 (1969)], melynek megírásakor a nem algebrista olvasók érdeklődésére is gondoltak. A ferdetestek szerkezetére vonatkozó speciális eredményeknek, amelyek a 11. fejezetben szerepelnek, rendszerezett tárgyalását találhatjuk Deuring áttekintő művében [33 (1935)], illetve A. Weil könyvében [106 (1935)].

Az eddig idézett forrásmunkák nagyrészt lefedik a 2–11. fejezetek anyagát. A 12. fejezettől csoportelméletre térünk át; az alapokhoz ismét van der Waerden könyvét ajánlhatjuk, valamint (a szemléletünk kiszélesítése érdekében) H. Weyl klasszikus monográfiájának [107 (1928)] csoportelmélettel foglalkozó fejezeteit. Noha az olyan intuitív fogalmak, mint pl. a transzformációcsoportok, természetes példát adnak csoportokra, a csoportok általános fogalmának, valamint a csoportelméletnek mint külön témának a kifejlődésére a legnagyobb hatással a véges halmazokon, ill. még pontosabban, egy polinom gyökein ható permutációcsoportok fogalma volt. A Lagrange-ig és Abelig visszanyúló ötletek Galois munkájában öltöttek először konkrét formát [45 (1951)]. Ebben nagyon világosan kimutatható annak a fokozatos megértése, hogy a testelméleti kérdések a Galois-csoporthoz mint absztrakt csoporthoz kapcsolhatók annak ellenére, hogy az konkrét permutációcsoportként jelenik meg. (Lagrange ezt úgy fejezte ki, hogy azt mondta, „a permutációk adják az egyenletek metafizikáját”.) További ösztönzést adott az, ahogyan Gauß módszeresen használta a kongruenciaosztályokat, illetve a kvadratikus alakok osztályait, s ahogyan műveleteket definiált ezeken [46 (1870)]; ez azt az érzést keltette, hogy a felszín alatt egy általános fogalom van elrejtve.

Az első ismert csoportelméleti könyv Jordantól származik [70 (1870)]; a könyv példák és ötletek gazdag tárháza, és értéke a mai napig megmaradt. A könyv csak véges transzformációcsoportokkal foglalkozik. Klein és Lie munkásságával a végtelen diszkrét és folytonos csoportok is előtérbe kerültek. Itt elősöris Klein csodálatos könyvére hivatkozhatunk („Előadások a matematika fejlődéséről a XIX. században” [73 (1926)]); a csoportelmélet adott időszakban végbement fejlődését annak egyik legnagyobb hatású kutatója szemszögéből ismerhetjük itt meg. A könyvnek azonban számos egyéb érdekes vonatkozása is van az algebra más ágainak fejlődéséről, illetve a matematika egészéről.

Az első könyv, amely absztrakt csoportelmélettel foglalkozik, Burnside munkája [21 (1897)], melyben csak véges csoportokról esik szó. A későbbi munkák hosszú időn keresztül csupán ezen a mű tökéletesítéseinek tekinthetők; a legteljesebb tárgyalást Speiser könyvében találhatjuk [98 (1937)]. A véges csoportok modern tárgyalását adja Huppert és Blackburn háromkötetes munkája [67 (1967), 68 (1982)]. A végtelen csoportok Kuros könyvében kerülnek leginkább előtérbe [77 (1955, 1956)]. A csoportok generátorokkal és definiáló relációkkal való megadásának érdekes történeti áttekintését találhatjuk Chandler és Magnus könyvében [24 (1981)]. Az ennek során fölmerülő logikai problémákról olvashatunk például Manyin könyvében [81

(1977)].

A Lie-csoportok elméletében az első könyv Lie és Engel háromkötetes munkája [79 (1883–1893)]; a könyv egy új tudományág születésének figyerelmre méltó dokumentuma. A legfontosabb fogalmak korszerűbb tárgyalását találhatjuk Pontrjagin munkájában [90 (1938)], illetve egy még korszerűbbet (azaz ahol csak lehetséges, koordinátáktól független tárgyalásmódot) Chevalleynál [25 (1946)]. A témát szépen tárgyalja Hochschild munkája is [64 (1965)].

Az algebrai csoportoknál Chevalley áttekintő munkáját kell megemlítenünk [28 (1958)], valamint A. Borel [12 (1969)], Humphreys [66 (1975)] és Springer [99 (1981)] könyveit. Az egyszerű Lie-csoportok osztályozását az alábbi helyeken találhatjuk meg: kompakt csoportokra Zselobenkónál [111 (1970)] és Pontrjaginnál [90 (1938)], komplex csoportokra a *Séminaire Sophus Lie* című könyvben [95 (1955)], valós Lie-csoportokra pedig Goto és Grosshans munkájában [50 (1978)]. Az egyszerű algebrai csoportok osztályozása megtalálható a Chevalley szemináriumáról megjelent könyvben [27 (1958)], valamint Humprheys [66 (1975)] és Springer [99 (1981)] könyvében. A véges egyszerű csoportokhoz Tits áttekintését említjük meg [103 (1963)], valamint Gorenstein könyvét [49 (1982)] (noha a könyv nem tartalmazza a klasszifikációs tétel bizonyítását — ennek egységes, kompakt leírása ma még nem is létezik).

A véges csoportok reprezentációelméletének megalapozása Frobeniustól származik; ezt pl. az összegyűjtött munkáit tartalmazó kötetekben [44 (1968)] is megtalálhatjuk. A téma újabb tárgyalása szerepel H. Weyl könyvének [107 (1928)] megfelelő részében, ill. Serre könyvének [96 (1967)] az elején (az első nyolc fejezetben). A kompakt csoportok reprezentációihoz érdemes még megnéznünk Weyl [107 (1928)], Pontrjagin [90 (1939)], Chevalley [25 (1946)] és Zselobenko [111 (1970)] könyvét. Lie-csoportok reprezentációinak széles áttekintését találhatjuk Kirillov könyvében [72 (1972)]. Aktuálisabb problémákba ad bevezetőt az Atiyah szerkesztette konferenciakötet [6 (1979)].

A reprezentációelméletben klasszikusnak számít H. Weyl könyve [109 (1939)]. Megjelenése nagyban befolyásolta a téma további fejlődését. Így például megtalálhatjuk itt a „koordinátázás” fogalmát is, valamint a szimmetriák és a reprezentációk közötti összefüggés gondolatát, amelyet ebben a könyvben is használtunk.

A Lie-elmélet gyakorlatilag bármelyik általunk idézett, Lie-csoportokról szóló tankönyvben megtalálható. A fejlődés különböző szakaszait figyelhetjük meg Lie és Engel könyvében [79 (1883, 1888, 1893)], valamint Pontrjagin [90 (1939)], Chevalley [25 (1946)] és Hochschild [64 (1965)] munkáiban.

A Cayley-számokról szól Freudenthal áttekintése [43 (1951)]. A geometriai alkalmazásoknál Lawson összefoglaló munkájára utalunk [78 (1985)].

A valós számtest fölötti nemasszociatív ferdetestek fő tételének bizonyítását megtalálhatjuk Atiyah könyvében [4 (1967)]

A kategóriák és a funktorok fogalma Eilenberg és MacLane munkáiban jelent meg először [38 (1942)], [39 (1945)]; itt a szerzők részletesen kifejtik, hogyan használhatjuk ezeket az új fogalmakat a matematika új nyelveként a matematika axiomatizálásában. A kategóriaelmélet alapfogalmainak rendszerezett tárgyalását találhatjuk Hilton és Stammbach könyvének [61 (1971)] második fejezetében. Grothendieck cikkének [51 (1957)] első részében az elmélet egyes aspektusairól olvashatunk. A kategóriák csoportobjektumainak részletes leírását találhatjuk könyvének [53 (1961)] 0. fejezetében (8.§).

A homologikus algebra rendszeres megalapozását adja Hilton és Stammbach könyve [61 (1971)]. A téma klasszikusának számít Cartan és Eilenberg könyve [22 (1956)], de ennek a szemléletmódja absztraktabb. A csoportkohomológia elméletét Brown könyve [20 (1982)] hasonló szemlélettel tárgyalja, mint ez a könyv. A kévék kohomológiájának alapfogalmait megtalálhatjuk Tennison könyvében [102 (1975)]. Hirzebruch könyve [62 (1956)] klasszikus tankönyv, mely elsősorban a Riemann–Roch-tétel főbb alkalmazásaival foglalkozik.

A K-elméletnek azon részeit, melyek szerepelnek a könyvünkben, két áttekintő munkában találhatjuk meg: a topologikus K-eméletet Atiyah könyvében [4 (1967)], míg az algebrai K-elméletet Milnornál [85 (1971)]. A 22. fejezet végén tárgyalt kérdések kapcsán Szuszlin áttekintő cikkére [101 (1984)] utalunk, noha ez nem szélesebb olvasóközönség számára íródott.

Végezetül, mivel számos esetben használtunk fogalmakat és eredményeket a topológia tárgyköréből (különösen a kategóriaelméletről, valamint a homologikus algebráról szóló fejezetekben), megadunk néhány topológiai hivatkozást is. A 20. fejezetéhez hasonló szemlélettel íródott Dold [36 (1980)] és Switzer [100 (1975)] könyve. Az olyan esetekben viszont, ahol a geometriai intuíciónak nagyobb szerepe van (mint pl. a felületek topológiájával kapcsolatban), Seifert és Threlfall [94 (1934)] régi könyve pótolhatatlan marad. A differenciálható sokaságokról, illetve a rajtuk megadott differenciálformák integrálásáról olvashatunk Chevalley [25 (1946)] és de Rham [92 (1955)] könyvében.

Most áttérünk az egyes példákkal kapcsolatos irodalom ismertetésére. Az egész könyvben újra és újra fölbukkanó témák közül a leggazdagabb példaanyaga talán annak a gondolatnak van, amely az algebrai és funkcionális szemlélet közötti „dualitásról" szól: ilyen pl. a gyűrűelemeknek a (maximális vagy a prím) ideálok halmazán értelmezett függvényekként való értelmezése, ill. a számok és a függvények közötti analógia. Ez a gondolatkör egyáltalán nem újkeletű. A valós függvényeknek a komplex számsíkra való analitikus kiterjesztése már fölveti azt a kérdést, hogy van-e valamilyen „természetes" halmaz, amelyen egy függvényt értelmezhetünk. Nagy előrehaladást jelentett ebben az irányban a Riemann-felületek fogalmának a megalkotása. Dedekind és Weber cikkében [31 (1882)] egy egyváltozós algebrai függvénytestnek (a mi jelölésünkkel a $K(C)$ testnek, ahol C egy algebrai görbe) a Riemann-felületét tisztán algebrai úton definiálják mint a $K(C)$-ből (a ∞ szimbólummal kiegészített) K-ba menő „homomorfizmusok" halmazát. Kronecker cikke [76 (1882)], mely ugyanazon folyóirat ugyanazon számában jelent meg, mint az előbbi cikk, olyan programot terjeszt elő, amely egyesítené az algebrai számok, illetve az akárhány változós algebrai függvények elméletét. A számok és függvények közötti párhuzamok tárgyalását Klein munkájában is megtalálhatjuk [73 (1926)]. Az egyváltozós algebrai függvények elméletét Dedekind és Weber cikkének szellemében fejti ki Chevalley könyve [26 (1951)].

Az általános topológia és a logika kérdéseivel kapcsolatban igazolható, hogy egy Boole-gyűrű előáll mint egy adott típusú topologikus téren értelmezett $\mathbb{F}_2$-értékű folytonos függvények gyűrűje (ezzel kapcsolatban lásd Birkhoff könyvét [10 (1940)]). Ugyanezen ötleteknek a folytonos valós vagy komplex értékű függvényekre való alkalmazásáról olvashatunk Gelfand, Rajkov és Silov munkájában [47 (1960)]; a C^∞-függvényekre lásd Bröcker könyvét [19 (1975)], analitikus függvényekre pedig Hoffmanét [65 (1962)]. Végezetül, a sémák fogalmát Grothendieck vezette be: ez a fogalom, mely mind a számelmélethez, mind az algebrai geometriához kapcsolódik, lehetővé teszi, hogy számelméleti kérdésekben geometriai intuíciót alkalmazhassunk. Ezzel kapcsolatban Groethendieck áttekintő cikkére utalhatunk [52 (1960)], valamint Manyin előadásainak jegyzetére [83 (1970)], illetve Safarevics könyvének 5. fejezetére [93 (1972)]. Ebbe a körbe tartozik az infinitezimális módszerek alkalmazása a számelméletben, speciálisan a p-adikus számok konstrukciója. Ehhez, valamint az algebrai egészek gyűrűinek elméletéhez találunk elemi bevezetőt Borevics és Safarevics könyvében [15 (1964)]; az elmélet mélyebb eredményeihez lásd Weil könyvét [106 (1967)].

A könyvet átszövő másik gondolat a „koordinátázás" gondolata, szűkebb értelemben a sík és a projektív terek koordinátázása. Erről (s különösképpen a Desargues- és a Papposz-axiómák szerepéről) olvashatunk Hilbert könyvében [59 (1930)]; a téma algebraibb jellegű tárgyalását találhatjuk E. Artin [3 (1957)], illetve Baer [7 (1952)] könyvében. A folytonos geometriák képezik a tárgyát Neumann könyvének [87 (1960)].

Igen gyakran találkoztunk véges testekkel; ezeket Galois fedezte föl, s teljes elméletük már az ő munkáiban is megtalálható [45 (1951)]. A véges testeknek (és különösképpen a véges testek fölötti algebrai geometriának) a kódelméletben való alkalmazásairól olvashatunk Goppa [48 (184)], illetve Manyin és Vlehduts [82 (1984)] áttekintő cikkeiben.

Az algebrai módszereknek a fölcserélhető differenciáloperátorok elméletében való alkalmazása azokkal az eredményekkel kezdődött, melyekről Ince könyvének [69 (1927)] 5.5. részében olvashatunk. Ezeket az eredményeket elfelejtették, majd néhány évtizeddel később újra fölfedezték. Modern áttekintést találunk Mumford cikkében [86 (1977)].

Az ultaszorzatokról lásd Barwise többedmagával írott kézikönyvét [8 (1970)].

Modulusok tenzorszorzatának, külső és szimmetrikus hatványainak a definícióját megtalálhatjuk pl. Kosztrikin és Manyin könyvében [75 (1980)] vagy a Bourbaki-kötetekben [16 (1942–1948)]. A teljessé tétel tulajdonságairól olvashatunk pl. Atiyah és Macdonald könyvében [5 (1969)].

A Clifford-algebrák számos példában megjelennek. A fogalmat Clifford vezette be a XIX. században (lásd az összegyűjtött munkáit [29 (1982)]), és (egy speciális esetben) Dirac fedezte föl újra a XX. században [35 (1930)], mikor egy másodrendű differenciáloperátort egy mátrix-együtthatós elsőrendű differenciáloperátor négyzeteként próbált előállítani. A téma modern tárgyalását találhatjuk a Bourbaki-könyvben [17 (1959)].

Most rátérünk a csoport fogalmával kapcsolatos példákra. A szimmetria fogalmával foglalkozik H. Weyl könyve [110 (1952)]. A szimmetriák és a megmaradási törvények közötti kapcsolatot (ill. E. Noether tételét) illetően lásd Courant és Hilbert [30 (1931)], valamint Arnold [2 (1974)] könyvét. A fizikai törvények szimmetriáit tárgyalják Feynman érdekes előadásai [40 (1965)].

Azon csoportok közül, melyek nem transzformációcsoportokként állnak elő, az $\mathrm{Ext}(A, B)$ csoportokról bármely idézett homologikus algebrai könyvben olvashatunk, a Brauer-csoportról Deuring könyvében [33 (1935)], az ideálok osztálycsoportjáról pedig Atiyah és Macdonald könyvében [5 (1969)] találunk leírást.

Hadamard könyve [54 (1908)] részletesen tárgyalja a platóni testeket és kapcsolatukat a véges mozgáscsoportokkal. A komplex számsík törtlineáris transzformációinak véges részcsoportjaival foglalkozik Hadamard egy másik könyve [55 (1951)]. Hálók szimmetriáinak az elemzését találhatjuk Klemm könyvében [74 (1982)].

A tükrözésekkel generálható véges csoportok részletes elemzése található a Bourbaki-könyvben [18 (1968)]. Megdöbbentő módon azok a 13. fejezetben szereplő diagramok, melyek segítségével ezeket a csoportokat osztályozni lehet, egy sereg más klasszifikációs problémában is előbukkannak (a legfontosabb ezek között az egyszerű kompakt vagy komplex Lie-csoportok osztályozása). Ezekről az összefonódásokról ad áttekintést a Hazewinkel és mások által írt cikk [58 (1977)].

A geometriai kristálytan a témája Delone, Padurov és Alekszandrov könyvének [32 (1934)]. A téma modernebb tárgyalását találhatjuk Klemmnél [74 (1982)], ahol találkozhatunk a díszítéscsoportokkal és az n-dimenziós kristálycsoportokkal is. Hilbert és Cohn-Vossen könyvének [60 (1932)] egyik fejezete szintén ennek a témának van szentelve. Malcev cikkében [80 (1956)] megtalálhatjuk azoknak a díszítéseknek a teljes leírását, amelyek mind a 17 síkcsoportot jellemzik.

E.S. Fjodorov 1889-ben, Schoenflies pedig 1890-ben (egymástól függetlenül) osztályozták a kristálycsoportokat. A következő évben Fjodorov a síkbeli díszítéscsoportokat osztályozta [41 (1981)], tanúbizonyságot adva a probléma geometriai jellegének (egy kristálytudóshoz képest) igen mély szintű megértéséről. Megdöbbentő, hogy egy olyan széles körben ismert és olvasott matematikus, mint H. Weyl a következőt írhatta le a [110 (1952)] munkájának 103–4. oldalán: „...a transzformációcsoportok matematikai fogalmát csak a tizenkilencedik században alkották meg; és csak ennek alapján lehet bebizonyítani, hogy az a 17 szimmetria, melyet már az egyiptomi kézművesek is (implicite) ismertek, kimeríti az összes lehetőséget. Különös, hogy ezt csak 1924-ben bizonyította be G. Pólya, aki ma a Stanford Egyetemen tanít.” Még különösebb az a tény, hogy Weyl föntebb idézett sorai képezték a tárgyát a Mathematical Intelligencer több számában megjelent cikksorozatnak (Pederson és mások tollából [89 (1983–1984)]). A vita azonban arról folyt, hogy vajon valóban ismerték-e az egyiptomi kézművesek mind a 17 szimmetriát, és a résztvevők egyike sem figyelt föl arra a hamis állításra, hogy ki oldotta meg az osztályozás matematikai feladatát.

A Bolyai–Lobacsevszkij-féle hiperbolikus sík mozgásainak diszkrét csoportjairól, valamint a Riemann-felületekkel fönnálló kapcsolatukról lásd Hadamard könyvét [55 (1951)]. A fundamentális csoport, az univerzális fedő, valamint a csomók csoportjainak fogalmáról olvashatunk Seifert és Threlfall régies stílusú, de geometriai szemléletű könyvében [94 (1934)].

A topológia, illetve a csoportelmélet algoritmikus jellegű problémáinak kapcsolatáról olvashatunk Fomenko könyvében [42 (1983)].

Bár a mai megnevezést még nem használta, a fonatcsoportokat először Hurwitz vizsgálta mind geometriai formájukban (ahogy ma rendszerint definiáljuk őket), mind pedig fundamentális csoportokként; sokkal később mindkét előállításukat külön-külön újra fölfedezték. Erről olvashatunk Chandler és Magnus könyvében [24 (1982)].

A tóruszoknak a Liouville-tételben játszott szerepét illetően lásd Arnold könyvét [2 (1974)]. A klasszikus kompakt csoportok elméletének gondos kidolgozását találhatjuk Chevalley könyvében [25 (1946)]. Kosztrikin és Manyin könyvében [75 (1980)] más Lie-csoportok is szerepelnek, a speciális dimenziókban közöttük fönnálló fontos relációkkal egyetemben.

Algebrai csoportokról és a diszkrét csoportokkal fönnálló kapcsolatukról A. Borel áttekintő cikkében olvashatunk [13 (1963)].

A 17. fejezetben a reprezentációelmélet kapcsán példaként szereplő Helmholtz–Lie-elmélet a témája H. Weyl vonzó, de kissé nehéz könyvének [108 (1923)].

Az $O(4)$ csoport reprezentációival, valamint a négydimenziós Riemann-sokaságok görbületi tenzorával kapcsolatban lásd a Besse által szerkesztett kötetet [9 (1981)].

Az $SU(2)$ reprezentációinak és a kvatummechanikának a kapcsolatával foglalkozik H. Weyl könyve [107 (1928)].

A csoportelmélet alkalmazásaiként szereplő példák közül a Galois-elmélet egy tárgyalását megtalálhatjuk van der Waerden könyvében [104 (1930, 1931)]. Kaplansky könyve [71 (1957)] rövid bevezetőt ad a differenciál Galois-elméletbe. Cassels és Fröhlich könyvében [23 (1967)] olvashatunk azokról a csoportokról (az ún. Gyemuskin-csoportokról), melyek a p-adikus számtestek bővítéseivel foglalkozó Galois-elméletnél állnak elő, s amelyeknél titokzatos párhuzamokat fedezhetünk föl a felületek fundamentális csoportjaival. Az invariánselmélet alkalmazásairól lásd Deudonné és Carrell könyvét [34 (1971)].

Ami a csoportreprezentációknak az elemi részecskék osztályozásánál játszott szerepét illeti, a szerző csak azokat a munkákat tudja fölsorolni, melyekből ő is megismerte a témát. A legfőbb forrás Bogoljubov munkája volt [11 (1967)]. Érdekes bevezetőt ad Dyson áttekintő cikke [37 (1964)]. Ugyancsak hasznos lehet Zselobenko könyvének [111 (1970)] harmadik függeléke.

A merev testek mozgásegyenleteinek értelmezéséről a Lie-csoportokkal és a Lie-algebrákkal öszefüggésben, valamint mindezek általánosításairól lásd Arnold [2 (1974)] és Fomenko [42 (1983)] könyveit. A formális csoportok teljesebb tárgyalását adja Hazewinkel könyve [57 (1978)].

A kategóriaelméleti példák topologikus konstrukcióit megtalálhatjuk Dold [36 (1980)] és Switzer [100 (1975)] könyvében.

Komplexusok homológiájával és kohomológiájával kapcsolatban Hilton és Stammbach könyvére utalunk [61 (1971)]. A de Rham-kohomológiáról és de Rham tételéről de Rham könyvében [92 (1955)] olvashatunk, noha de Rham tételét manapság legegyszerűbben kévék segítségével bizonyíthatjuk.

A kévék kohomológiájánál a legfontosabb példa a Riemann–Roch-tétel. Ez a témája Hirzebruch könyvének [62 (1956)].

A topologikus K-elméletnél a legfontosabb példa az indextétel volt. Ebbe a témába ad gyönyörű bevezetőt Hirzebruch áttekintő cikke [63 (1965)]. A tétel teljes bizonyítását Palais könyvében [88 (1965)] találhatjuk meg.

Az algebrai K-elméletben a K_2 csoport és a Brauer-csoport kapcsolatáról szóló tétel Merkurjevtől és Szuszlintól származik (lásd [101 (1984)]). A véges testek K_n-csoportjának rendjére vonatkozó eredmények Quillentől származnak [91 (1972)]. Az egészek K_n-csoportjának rendjére vonatkozó sejtések és eredmények tekintetében lásd Soulé cikkét [97 (1979)].

Az algebra egészének fejlődésébe és a matematika egyéb részeivel való kölcsönhatásokba nyerhetünk jó betekintést Klein fölbecsülhetetlen értékű „Előadásain” keresztül [73 (1926)]. Számos érdekes megjegyzést találhatunk a Bourbaki-kötetek történeti megjegyzései között. Érdekes, noha speciális kérdéssel foglalkozó könyv Chandler és Magnus munkája [24 (1982)].

Irodalomjegyzék

[1] *A növények élete, 5. kötet, 2. rész.* Proszvescsenyije, Moszkva, 1981 (oroszul)

[2] Arnold, V.L: *A klasszikus mechanika matematikai módszerei.* Nauka, Moszkva, 1974 (oroszul). Angol fordításban: *Mathematical methods of classical mechanics.* Graduate Texts in Mathematics **60**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1978, Zbl. 386.70001

[3] Artin, E.: *Geometric algebra.* Interscience, New York 1957, Zbl. 77, 21. Orosz fordításban: Nauka, Moszkva 1969, Zbl. 174, 294

[4] Atiyah, M.F.: *K-theory.* Benjamin, New York–Amsterdam 1967, Zbl. 159, 533

[5] Atiyah, M.F., Macdonald, M.F.: *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley, Reading, Mass. 1969, Zbl. 175, 36