

Tartalomjegyzék

Előszó	8
1. Mi az algebra?	10
A koordinátázás gondolata. Példák: kvantummechanikai szótár, illetve az illeszkedési és párhuzamossági axiómák véges modelljei.	
2. Testek	15
Testaxiómák, izomorfizmus. Független változók racionális függvényteste; algebrai síkgyöbe függvényteste. A Laurent-sorok és a formális Laurent-sorok teste.	
3. Kommutatív gyűrűk	21
Gyűrűaxiómák; nullosztók és integritási tartományok. Hányadostest. Polinomgyűrűk. Egy algebrai síkgyöbe polinomfüggvényeinek a gyűrűje. Hatványsorok és formális hatványsorok gyűrűje. Boole-gyűrűk. Gyűrűk direkt összege. Folytonos függvénygyűrűk. Faktorizáció, egyértelmű prímfaktorizációs tartományok, példák.	
4. Homomorfizmusok és ideálok	28
Homomorfizmusok, ideálok, faktorgyűrűk. A homomorfizmustétel. Homomorfizmusok megszorítása függvénygyűrűkben. Nullosztómentes főideálgyűrűk; kapcsolatuk az egyértelmű prímfaktorizációs tartományokkal. Ideálok szorzata. Test karakterisztikája. Adott polinom gyökét tartalmazó bővítések. Algebrailag zárt testek. Véges testek. Egy általános gyűrű elemeinek reprezentálása a maximális ideálokon értelmezett függvényként. Az egészek mint függvények. Ultraszorzat és nemsztenderd analízis. Fölcserélhető differenciáloperátorok.	
5. Modulusok	39
Direkt összeg és szabad modulusok. Tenzorszorzat. Egy modulus tenzorhatványai, szimmetrikus és külső hatványai, a duális modulus. Ekvivalens ideálok és modulusok izomorfizmusa. Differenciálformák és vektormezők modulusai. Vektorterek és modulusok családjai.	
6. A dimenzió algebrai aspektusai	46
Egy modulus rangja. Végesen generált modulusok. Nullosztómentes főideálgyűrű fölötti végesen generált modulusok. Noether-modulusok és -gyűrűk. Noether-gyűrűk és végesen generált gyűrűk. A fokszámzott gyűrűk esete. Bővítés transzcendenciafoka. Véges bővítések.	
7. A végtelen kicsi fogalmának algebrai megközelítése	56
Függvények modulo másodrendben végtelenül kis mennyiségek; sokaságok érintőtere. Szinguláris pontok. Vektormezők és elsőrendű differenciáloperátorok. Magasabb rendben végtelen kis mennyiségek. Differenciáloperátorok és jetek. Gyűrűk teljessé tétele, a p -adikus számok. Értékelt testek. A racionális számtest és a racionális függvénytestek értékelései. A p -adikus számok teste a számelméletben.	
8. Nemkommutatív gyűrűk	68
Alapfogalmak. Gyűrű fölötti algebrák. Modulus endomorfizmusgyűrűje. Csoportalgebrák. Kvaterniók és ferdetestek. Tvisztorfibrálás. Ferdetest fölötti n -dimenziós vektortér endomorfizmusai. A tenzoralgebra és a nemkommutatív polinomgyűrű. Külső algebra; szuperalgebrák; Clifford-algebra. Egyszerű gyűrűk és algebrák. Ferdetest fölötti vektortér endomorfizmusgyűrűjének bal- és jobbideáljai.	
9. Nemkommutatív gyűrűk fölötti modulusok	80
Modulusok és reprezentációk. Algebrák reprezentálása mátrix alakban. Egyszerű modulusok, kompozícióláncok, a Jordan–Hölder-tétel. Gyűrű és modulus hossza. Modulusok endomorfizmusai. A Schur-lemma.	

10.	Féligegyszerű modulusok és gyűrűk	85
	Féligegyszerűség. A csoportalgebra féligegyszerű. Féligegyszerű gyűrűk fölötti modulusok. Véges hosszúságú féligegyszerű gyűrűk, Wedderburn tétele. Véges hosszúságú egyszerű gyűrűk és a projektív geometria alaptétele. Faktorok és folytonos geometriák. Véges rangú féligegyszerű algebrák algebrailag zárt test fölött. Alkalmazások a véges csoportok reprezentációinál.	
11.	Véges rangú ferdetestek	97
	Véges rangú ferdetestek \mathbb{R} vagy a véges testek fölött. Tsen tétele és az algebrailag majdnem zárt testek. Véges rangú centrális ferdetestek a p -adikus és a racionális testek fölött.	
12.	A csoport fogalma	103
	Transzformációcsoportok, szimmetriák, automorfizmusok. Egy dinamikai rendszer szimmetriái és a megmaradási törvények. Fizikai törvények szimmetriái. Csoportok, a reguláris hatás. Részcsoportok, normálosztók, faktorcsoportok. Elem rendje. Az ideálok osztálycsoportja. Modulusok bővítéscsoportja. Brauer-csoport. Két csoport direkt szorzata.	
13.	Példák csoportokra: Véges csoportok	116
	A szimmetrikus és az alternáló csoport. Szabályos sokszögek és szabályos poliéderek szimmetriacsoportja. Rácsok szimmetriacsoportja. Kristályosztályok. Tükrözésekkel generált véges csoportok.	
14.	Példák csoportokra: Diszkrét végtelen csoportok	131
	Diszkrét transzformációcsoportok. Kristálycsoportok. A hiperbolikus sík diszkrét mozgáscsoportjai. A moduláris csoport. Szabad csoportok. Csoportok megadása generátorokkal és definiáló relációkkal. Logikai kérdések. A fundamentális csoport. Csomók csoportjai.	
15.	Példák csoportokra: Lie-csoportok és algebrai csoportok	146
	Lie-csoportok. Tóruszok. Liouville tétele.	
	A. Kompakt Lie-csoportok	149
	A klasszikus kompakt csoportok és néhány közöttük fennálló összefüggés.	
	B. Komplex analitikus Lie-csoportok	153
	A klasszikus komplex Lie-csoportok. Néhány további Lie-csoport. A Lorentz-csoport.	
	C. Algebrai csoportok	156
	Algebrai csoportok és az adèle-csoport. Tamagawa-szám.	
16.	Csoportelméleti eredmények	157
	Direkt szorzat. A Wedderburn–Remak–Schmidt-tétel. Kompozícióláncok, a Jordan–Hölder-tétel. Egyszerű csoportok, föloldható csoportok. Kompakt egyszerű Lie-csoportok. Komplex egyszerű Lie-csoportok. A véges egyszerű csoportok és osztályozásuk.	
17.	Csoportok reprezentációelmélete	166
	A. Véges csoportok reprezentációi	169
	Reprezentációk. Ortogonalitási relációk.	
	B. Kompakt Lie-csoportok reprezentációi	173
	Kompakt csoportok reprezentációi. A csoporton való integrál létezése. A Helmholtz–Lie-tétel. Kompakt Abel-csoportok karakterei, Fourier-sorok. Weyl- és Riccitenzorok a 4-dimenziós Riemann-geometriában. Az $SU(2)$ és $SO(3)$ csoport reprezentációi. A Zeeman-effektus.	
	C. Komplex klasszikus Lie-csoportok reprezentációi	181
	A nemkompakt Lie-csoportok reprezentációi. A véges dimenziós klasszikus komplex Lie-csoportok reprezentációi teljesen reducibilisek.	

18.	Csoportok alkalmazásai	183
	A. Galois-elmélet	183
	Galois-elmélet. Egyenletek megoldása gyökjelekkel.	
	B. A lineáris differenciálegyenletek Galois-elmélete (Picard–Vessiot-elmélet)	187
	C. Az elágazás nélküli fedések osztályozása	188
	Az elágazás nélküli fedések osztályozása és a fundamentális csoport.	
	D. Invariánselmélet	189
	Az invariánselmélet első alaptétele.	
	E. Csoportreprezentációk és az elemi részecskék osztályozása	190
19.	Lie algebrák és nemasszociatív algebrák	194
	A. Lie-algebrák	194
	A Poisson-zárójel mint Lie-algebrák. Lie-gyűrűk és Lie-algebrák.	
	B. Lie-elmélet	198
	Lie-csoport Lie-algebrája.	
	C. Lie-algebrák alkalmazásai	203
	Lie-csoportok és a merev test mozgása.	
	D. Más nemasszociatív algebrák	205
	A Cayley-számok. A 8-dimenziós tér 6-dimenziós részsokaságainak majdnem komplex struktúrája. Nemasszociatív valós ferdetestek.	
20.	Kategóriák	208
	Diagramok és kategóriák. Az univerzális diagramok. Funktorok. Funktorok a topológiában: hurokterek, szuszpenzió. Csoportobjektumok kategóriákban. Homotópiacsoportok.	
21.	Homologikus algebra	220
	A. A homologikus algebra fogalmainak topológiai gyökerei	220
	Komplexusok és homológiák. Poliéderek homológiája és kohomológiája. Fixpont-tétel. Differenciálformák és a de Rham-kohomológia; de Rham tétele. A kohomológiasoportok hosszú egzakt sorozata.	
	B. Modulussok és csoportok kohomológiája	226
	Modulussok kohomológiája. Csoportkohomológia. Diszkrét csoportok kohomológiájának topológiai jelentése.	
	C. Kévék kohomológiája	232
	Kévék, kévék kohomológiája. Végességi tételek. A Riemann–Roch-tétel.	
22.	K -elmélet	238
	A. Topologikus K -elmélet	238
	Vektornyalábok és a $\mathcal{V}ec(X)$ funktor. Periodicitás és a $K_n(X)$ funktorok. $K_1(X)$ és a végtelen dimenziós lineáris csoport. Elliptikus differenciáloperátor szimbóluma. Az indextétel.	
	B. Algebrai K -elmélet	243
	Projektív modulussok osztályainak a csoportja. Gyűrű K_0 -, K_1 - és K_n -csoportja. Test K_2 -csoportja és ennek kapcsolata a Brauer-csoporttal. K -elmélet és számelmélet.	
	Megjegyzések az irodalomhoz	247
	Irodalomjegyzék	252
	Tárgymutató	259
	Névmutató	271